UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA ECONÓMICA

ALGEBRA LINEAL-CICLO

1. Sean $A \in M_{mxp}$, $B, C \in M_{pxn}$,a y b escalares probar que :
   a. $A(B+C) = AB + AC$
   b. $(A+B)C = AC + BC$
   c. $(a+b)A = aA + bA$
2. Si $A \in M_{mxn}, B \in M_{nxp} C \in M_{pxq}$, demostrar : $(AB)C = A(BC)$,
3. Sean las matrices A de orden mxp y B una matriz de orden pxn
   Demostrar $(AB)^T = B^T A^T$
4. a. Sean las matrices X_{mxn} y $H = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T$.
   i) ¿Es H es simétrica ?
   ii) ¿H es idempotente ?

   b. Demostrar que si M es una matriz anti simétrica entonces

   $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ es ortogonal

5. Demostrar que si A es de $n \times n$, entonces $A + A^T$ es siempre una matriz **simétrica**, y $A - A^T$ es siempre una matriz **antisimétrica**. Dar un ejemplo de 2×2.

6. Mostrar que toda matriz A de $n \times n$ puede escribirse como $A = A_s + A_a$, con A_s simétrica y A_a antisimétrica. Mostrar también que A_s y A_a son únicas.

7. En la matriz siguiente se disponen las calificaciones de 5 estudiantes, obtenidas en 3 exámenes (puntaje máximo = 10 en cada uno). Cada columna corresponde al resultado de cada examen, mientras que las filas corresponden a los estudiantes.

$$\text{Estudiantes} \overset{\text{Exámenes}}{\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8.5 \\ 9 & 9.5 & 10 \\ 6 & 7 & 6.5 \\ 6 & 8 & 4 \\ 7.5 & 7 & 7 \end{pmatrix}} = A$$

(i) Si las calificaciones son modificadas agregando a todos los alumnos 1 punto a las del primer examen y .5 puntos a las del segundo examen, encontrar, usando la suma de matrices, una forma de calcular las nuevas calificaciones.
(ii) Si se decide reducir un 10 % todas las notas, encuentre una forma de realizar esta operación en forma matricial (sugerencia: multiplique por un escalar adecuado).
(iii) El profesor desea computar los promedios finales, considerando que el promedio proviene de la siguiente ponderación: 30 % del primer examen, 30 % del segundo y 40 % del tercero. Pensarlo como suma de tres vectores columnas.

8. Si A es una matriz nilpotente de índice 2, ¿Es $A(I \pm A)^2 = A$?

9. Dada una matriz A cualquiera, analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta

a) El producto AA^t está definido cualquiera que sea el tamaño de A.

b) El producto $A(A^t A)$ está definido cualquiera que sea el tamaño de A.

c) El producto $A(A^t A)^t$ está definido cualquiera que sea el tamaño de A.

d) Para que el producto AA^t esté definido es necesario que A sea cuadrada.

10. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{nxn}$ demostrar:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=i}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

11. Demostrar que si A y B son simétricos, entonces AB es simétrica sí y solo si $AB = BA$.

12. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ se llama matriz de MARKOV ó (Estocástica) sí:

a. $0 \leq a_{ij} \leq 1, \forall i,\ j \in \{1, 2, \ldots n\}$

b. $\sum_{J=1}^{n} a_{ij} = 1, \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$

Y una matriz estocástica es llamada doblemente estocástica, si la suma de los elementos de la columna es 1. Probar que el producto de dos matrices doblemente estocásticas es una matriz doblemente estocástica.

13. Probar las siguientes propiedades de una matriz cuadrada A.

i) Si A es involutiva y ortogonal entonces es simétrica.

ii) Si A es involutiva y simétrica entonces es ortogonal.

iii) Si A es ortogonal y simétrica entonces es involutiva.

14. Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Probar que verifica $A^3 + I = 0$, con ésta información obtener A^{22}.

15. Determine: A^{2021} , si $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Determine: A^n, si $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$

17.Sean a, b ,c tres números reales tales que verifican $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} .Calcular \ A^n$$

18. Sean las matrices A_{15x10} ,B_{10x20},C_{20x15},D_{15x20} ,$E=(CD)^T(AB)^T$, siendo: $A=(a_{ij})=j$, $B=(b_{ij})=j - i$, $C=(c_{ij})=i$, $A=(d_{ij})= i + j$.

a) Determinar el elemento genérico de la matriz E.

b)Determinar el elemento $e_{7,11}$ de la matriz E

19. Una pastelería elabora dos tipos de bizcocho: integral y Chiflón, utilizando harina, levadura y huevos.

Elaborar 50 integrales requiere 15 bolsas de harina, 3 unidades de levadura y 4 huevos; elaborar 50 chiflones requiere 10 bolsas de harina, 2 unidades de levadura y 6 huevos. La panadería tiene una sucursal en Lima y otra en provincias. En Lima cada bolsa de harina cuesta 15 u.m, cada unidad de levadura cuesta 10 u.m y cada huevo cuesta 3 u.m.; en provincias, los costos son de 10, 8 y 2 u.m. respectivamente.

a) Represente la información en dos matrices.

b) Determine, usando operaciones matriciales, los costos totales de producir 50 bizcochos de cada tipo en cada una de las sucursales.

20. Sean las matrices A, B , C y D de orden: mxm,nxn,mxn y nxm respectivamente

demostrar $(A+CBD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C\left(B^{-1} + DA^{-1}C\right)^{-1} DA^{-1}$

21. Demostrar:

a. Si A es inversible entonces $\left((A)^{-1}\right)^{-1} = A$ b. $\left((A)^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

$c.(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $d.\left[(AB)^{-1}\right]^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}\right)^{-1}$

22. Sea B una matriz de orden nx1, tal que $b_{ij} = 1, \ \forall$i,j

Demostrar que Aes idempotente y simétrica si: $A = I_n - \frac{1}{n}BB^{T}; \quad n \in N$

23. Si A y B son matrices cuadradas y A es no singular, verifique que:
$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

24. Sea A una matriz d tal que $A^{K} = O$,demostrar:

$(I - A)^{-1} = I + A + A^{2} + A^{3} + A^{4}........A^{K-1}$

25. Hallar A^{-1}, si: $A = \left(a_{ij}\right) = \begin{cases} 1; si\ i \le j \\ 0, si\ i > j \end{cases}$, si A es de orden nxn

26. Hallar los valores de x, y,z de manera que la siguiente matriz sea ortogonal**:**

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & x & 5 \\ 1 & y & -2 \\ 2 & z & -4 \end{bmatrix}$$

27. Determinar la matriz X talque : $\left(A^{-1}XA\right)^{-1} = A^{2}$,donde $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. Sean A,B matrices nilpotentes de mismo índice y supóngase que $AB = BA$

Demostrar que tanto AB **y** $A + B$ son nilpotentes

29. Determine las matrices $B\ y\ C \in M_{3x2}$,talque $AB = I_2 \quad y \quad CA = I_3$,donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Sea A una matriz de orden 4x4, talque $a_{ij} = 1, \ \forall$i,j ,probar que

$(I - A)^{-1} = I + cA, \quad c,$ un escalar adecuado

El Profesor